

LECTURE ON
AN INTRODUCTION TO TURBULENCE

基礎紊流

黃美嬌

臺灣大學 機械工程學系

中華民國八十六年二月

An Introduction to Turbulence

基礎紊流

黃美嬌

臺灣大學 機械工程學系

摘要

本文針對紊流流場作概略性的介紹。首先介紹截至目前為止，人們藉由實驗經驗與理論分析上對紊流的了解，所歸納出來的一些物理特性：介紹尺度觀念與能量傳遞觀念在紊流研究上所扮演的重要角色；介紹 similarity、universality、與 intermittency 這些特性與其影響；介紹 intermittency models 如 statistical models、fractal models 等的理念與結果。其次介紹等向均質紊流場，並介紹它的一些基礎理論，如 Karman-Howarth equation，與近似理論 (approximation theory)，如 DIA theory (direct-interaction theory)。最後歸納三種現今人們研究紊流流場所使用的數值方法：averaged motion、LES 與 DNS；對三種數值方法作概要性的介紹，並比較其差異與應用範圍。

大綱：

1. 引言
2. 紊流尺度 (scales) 與能量傳遞 (energy cascade)
3. small-scale universality 與 Kolmogorov 理論
4. 紊流間歇性與間歇模型 (intermittency)
5. 等向均質紊流場 (isotropic homogeneous turbulence)
6. 基礎理論發展
7. DNS 與 LES
8. Reynolds' equations 與 closure problem
9. 結論
10. 參考文獻

1. 引言

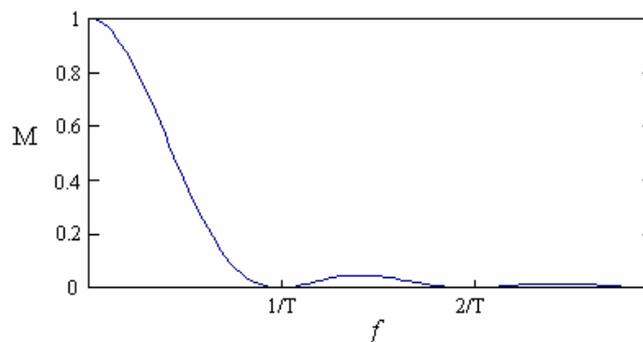
在某些條件下，流體可以平穩、有次序地運動著，我們稱之為層流 (laminar flow)；反之，流體的運動可能呈現不規則、不平穩，以一種似乎完全混亂的模式進行著，我們稱之為紊流 (turbulent flow)。層流與紊流的差異實驗，以 Osborne Reynolds (1883, 1884) 為先鋒。量測紊流場的任何一物理量，可以發現該物理量在時間軸上、在空間分佈上，都呈現極亂的波動 (fluctuations)；而波動的振幅可以是相當得大，並以非線性的方式影響著平均流場 (mean motion)。所謂平均流場指的是流場的時間平均值，定義為：

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(t') dt'$$

$$u(t) = \bar{u}(t) + u'(t)$$

有時，平均流場也定義為 ensemble average，即取許多流場條件相同的流場的平均值， $\langle u \rangle$ 。所謂 ergodic hypothesis 即假設 $\bar{u} = \langle u \rangle$ 。舉例說明，假設一訊號為 $u(t) = A \sin(2\pi f t)$ ，則 $\bar{u}(t) = A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \cdot \sin(2\pi f t)$ ，因此訊號振幅被以如下圖所示之

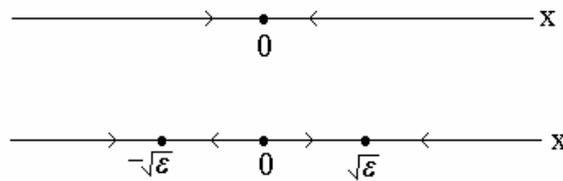
函數 $M \equiv \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2$ 過濾之：



因此，一多頻訊號，其高頻 ($f > 1/T$) 部分 (波動部分) 將有效的被除去； T 愈大 ($1/T$ 愈小)，愈多細微的流場結構會被略掉。

紊流的發生源於層流的不穩定 (unstable)。實驗發現當一流場其雷若數不大時，層流為一穩定解 (stable solution)；增加流場雷若數至某一程度時，層流會變成不穩定，這時流場中任何存在的干擾 (disturbance)，將被引發成長，破壞原有層流場結構，最後形成出一紊流場。這種解 (solutions) 間的變化只有在非線性動力系統中發生，我們可以很簡單的例子說明。考慮 $\dot{x} = \epsilon x - x^3$ ，當 $\epsilon \leq 0$ 時， $x=0$ 是其唯一一穩態解 (steady solution)，且為穩定 (stable)；反

之，當 $\varepsilon > 0$ ，有三穩態解 $x = 0$ 與 $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ 存在，其中 $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ 為穩定解，而原為穩定解的 $x=0$ 變為不穩定解。



紊流通常是三維不穩態 (3D unsteady)，兼有複雜的渦漩結構 (vorticity structures)。紊亂的波動使得流場的混合能力 (mixing) 大增，熱、質量、動量的傳遞能力都比層流來得強。而這種能力也使的紊流比層流更能抵抗逆壓 (adverse pressure gradients)，而比較不會分離 (separate)。紊流一樣是由 Navier-Stokes 方程式 (Newtonian fluids) 所統禦，理論上其運動應可以從方程式中預測得到，而事實上由於方程式的非線性與流場的複雜情形，使得紊流的預測常常為不可期。百年來，紊流的研究可分為四方面：實驗量測、數值模擬、模型預測與理論分析。數值模擬限於簡單的流場幾何但提供詳細的流場資料，與理論分析共同提供合理的現象解釋，協助紊流模型的開發，指引實驗設計暨量測的方向，以取得關鍵性的資料。

2. 紊流尺度 (scales) 與能量傳遞 (energy cascade)

紊流場的波動發生在很大範圍的時間尺度與空間尺度內 (time and length scales)。流場最大的空間尺度，若是管內流 (internal flows) 則為容器的尺寸，若是物外流 (external flows) 則通常是該物體的特徵尺寸 (characteristic dimension)。最小的空間尺度則由流體的黏滯係數 (viscosity) 決定，稱之為 Kolmogorov length scale，所有尺度小於 Kolmogorov length scale 的運動將會很快地被黏滯力磨耗掉而可當做不存在。大尺度的波動 (稱為“大漩渦”，large eddies) 本身是不穩定的，隨時會發展成，或說“碎成”，較小尺度的波動 (smaller eddies)，我們“認為”能量 (動能) 因此由大尺度運動“傳遞” (cascade) 至較小尺度運動；較小尺度運動本身又不穩定，再“碎成”更小尺度，能量因而再傳至更小尺度；整個傳遞過程不斷延續，直至最小尺度運動，在那裡能量因黏滯力磨耗而大量散失，轉為熱能。大尺度運動本身可能有一些能量源 (source)，是以不斷地有新的大尺度波動產生，不斷地有“能量傳遞”的過程，當紊流場因此得以在每個尺度內都維持著某一個固定程度的波動時，我們說此紊流場為“靜定的” (stationary)，也就是紊流場的平均運動 (統計平均值) 不隨時間的改變而改變。

從這樣一個能量傳遞的觀點上看來，紊流場中存在著許許多多的尺度運動 (multi-scale)，或者說紊流是由許許多多的尺度運動組合而成。實驗發現大部分的波動能量多

包含在較大尺度的運動中，而最大的波動尺度 (L) 約為 $L \sim \lambda \text{Re}_\lambda$ ，其中 λ 為 Taylor microscale，定義為

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{5\nu q^2}{\varepsilon}}$$

其中 ε 是單位質量的能量在不同尺度間的傳遞速率 ($\text{J}/\text{kg}\cdot\text{sec}$)， $\text{Re}_\lambda \equiv q\lambda/\nu$ ， q 為紊流強度，定義為 $q^2 \equiv \overline{u'_i u'_i}$ ， u'_i 為 i^{th} 方向的波動速度分量， ν 則為流體的 kinematic viscosity。至於最小尺度 Kolmogorov length scale (η) 則為

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \sim \lambda \text{Re}_\lambda^{-1/2}$$

因此紊流場中的長度尺度範圍為 $L/\eta \sim \text{Re}_\lambda^{3/2} \sim \text{Re}_L^{3/4}$ ($\because \text{Re}_\lambda \sim \text{Re}_L^{1/2}$ ， $\text{Re}_L \equiv qL/\nu$)。也就是當流場的雷若數愈大，流場運動的尺度範圍則愈寬；考慮同一流場時 (L 相同)，雷若數愈大， η 愈小，也就是說存在著愈細微的流場組織。一個普遍被承認的能量傳遞觀念即是：當較大尺度運動從平均流場或其他源頭獲得能量後，因不穩定而將能量往較小尺度運動傳遞，直傳至流場最小尺度為止；能量傳遞過程中，部分能量因黏滯力而磨耗，磨耗率則隨尺度變小而增大(與尺度關係成平方反比)，因此可以說大部分能量皆在小尺度運動中磨耗掉；對於“靜定”的紊流場，整個能量的磨耗率應等於流場自源頭獲得能量的速率，從另一個角度看，給定一個流場及一個黏滯係數 ν ，改變能量傳遞速率 ε ，流體運動會自動調整最小尺度 η ，以使能量也以 ε 的速率磨耗著，以是達到平衡。

3. small-scale universality 與 Kolmogorov 理論

紊流場的巨觀結構因流場種類不同而有差異，例如邊界流 (boundary flows)、管流 (channel flows)、噴流 (jets)、混流 (mixing layers) 等；此外，流場的幾何形狀可能是有方向性的，使得波動運動可能受到影響也有方向性。結果是大尺度運動的特徵多隨流場種類不同而不同，並可能具有方向性。

在上述能量傳遞的觀念中，能量既是一層層地傳遞著，預期流場幾何形狀對各個尺度運動的影響可能也是如此，並且其影響力應是愈來愈小；也就是流場的幾何形狀，對愈細微的流場組織愈沒有影響力。如此一來，當雷若數很大時，流場運動尺度範圍也很大，則可能存在著某些小尺度，其運動幾乎不受流場幾何形狀影響；而因為不受流場幾何形狀影響，這些小尺度運動不會因流場種類不同而有明顯差異，並且極可能不具方向性 (isotropic)。這種特性，我們稱為小尺度運動 (small-scale eddies) 的一致性 (universality)。

假設這樣的一致性存在，Kolmogorov 在 1941 年提出他的一致理論 (universal theory)：當流場雷若數很大時，影響小尺度運動的因素只剩下從大尺度傳來能量的速率 ε 與能量在此運動中的磨耗率(與 ν 有關)。前面提到紊流尺度範圍為 $L/\eta \sim Re_L^{3/4}$ ，因此要隔開流場幾何形狀對小尺度運動的影響，也就是隔開所謂“大漩渦”(large eddies) 與小漩渦 (small eddies)，流場必須滿足 $Re_L^{3/4} \gg 1$ 。

已知在能量傳遞過程中，能量在每一個尺度運動中都會因黏滯力而磨耗，而在每一個尺度運動中的磨耗量則隨著尺度變小而增大；也就是能量大多在小尺度運動中磨耗掉。Kolmogorov theory 的第二個部分是：假設流場的雷若數非常地大，以致於能量在較大尺度運動間是傳遞著但幾乎沒有磨耗，或說能量只有在傳遞到很小的“漩渦”時才會出現明顯的磨耗。如此，當雷若數大到某一程度時，可能出現一個尺度範圍，在這個範圍內的運動，尺度夠小而不受流場幾何形狀影響 (屬 universal eddies)，但又夠大，因而能量只是傳遞著而幾乎不磨耗。這一個範圍內的運動因此不受 ν 影響，或者說僅受慣性力或 ε 影響；這一個範圍因而稱之為慣性區 (inertial subrange)。要出現慣性區的條件是：在 L 與 η 之間，要出現另一特徵尺度遠小於 L 並且遠大於 η ；若取其為 L 與 η 的幾何平均數， $\sqrt{\eta L}$ ，則 $\eta \ll \sqrt{\eta L} \ll L$ ，也就是 $\lambda Re_\lambda^{-1/2} \ll \lambda Re_\lambda^{1/4} \ll \lambda Re_\lambda$ ，或者說流場必需滿足 $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$ ($Re_L^{3/8} \gg 1$)。

在慣性區內，既是運動僅受 ε 影響，則運動的能量頻譜 (energy spectrum)， $E(k)$ ，應只是波數 k 與 ε 的函數，i.e. $E(k) = f(k, \varepsilon)$ 。假設 ε 是均勻分佈於場中，因次分析 (dimensional analysis) 的結果是 $E(k)/(\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}) = \text{常數} \equiv C_K$ ， C_K 稱為 Kolmogorov 常數；亦即 $E(k) = C_K \cdot \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ 。結論是：能量頻譜在慣性區內呈一幂方分佈 (power-law distribution)，次方為 $-5/3$ ，此一次方在實驗室中已多次得到驗證。

結論：當雷若數非常大時，流場運動可分為：1. 蘊含大部份紊流能量的“大漩渦”(energy-containing eddies)、2. 流場幾何與黏滯力影響皆微的慣性漩渦 (inertial eddies)、3. 流場幾何影響甚小，磨耗大部份紊流能量的“小漩渦”(dissipation eddies)。

4. 紊流間歇性與間歇模型 (intermittency)

間歇性是紊流特性中極棘手的一項。量測紊流的速度場會發現其波動的機率分佈約略滿足高斯分佈 (Gaussian distribution)，但其空間微分量 (spatial derivatives) 卻非如此：有些時候 (有些區域) 微分量的波動極為劇烈，有些時候 (有些區域) 微分量的波動卻是十分和緩；這暗示著紊流的小尺度運動有著明顯的間歇性，間歇性的強度則會隨雷若數的增加而增大。

紊流的間歇性還有一種特質：若是將上述劇烈波動的區域放大來看，會發現在此一區域內也有間歇性，亦即此一區域內又分有劇烈區與和緩區；把劇烈區內的劇烈區放大，依然又可以找到劇烈區與和緩區。這種類似性 (similarity) 不斷發現，如同 Cantor Set 般，直至尺度到達流場最小尺度 η 。

間歇性的存在首先就使 Kolmogorov theory 中 ε 為均勻分佈的假設不合理。間歇性的影響，可以從 Kolmogorov 與 Obukov 在 1962 年提出的修正理論看出一些端倪。在慣性區中，假設能量頻譜 $E(k)$ 仍為波數 k 與 ε 的函數，則

$$E(k) = C_K \overline{\varepsilon_r^{2/3}} k^{-5/3}$$

其中 ε_r 乃以 $r \sim 1/k$ 為特徵半徑的區域內 ε 的平均值； $\overline{\cdot}$ 在此則表示體積平均值 (volume average)。1941 年的理論是 $\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \text{constant}$ ，因此 $\overline{\varepsilon_r^{2/3}} = \varepsilon^{2/3} = \overline{\varepsilon}^{2/3}$ 。當有間歇性時，Kolmogorov 與 Obukov (1962) 假設 ε_r 的機率分佈為 logarithmic normal distribution (LN theory)，Gurvich 與 Yaglom (1967) 引進 Central Limit Theorem 證明得到同樣的分佈：

$$f(\varepsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r}} \frac{1}{\varepsilon_r} \exp\left(-\frac{[\log(\varepsilon_r/\overline{\varepsilon}) + \sigma_r^2/2]^2}{2\sigma_r^2}\right),$$

其中並假設

$$\sigma_r^2 \equiv \overline{[\log(\varepsilon_r/\overline{\varepsilon})]^2} = A(\mathbf{x}, t) + \mu \log(L/r)$$

因此，

$$\overline{\varepsilon_r^{2/3}} \sim \overline{\varepsilon}^{2/3} (kL)^{-\mu/9}$$

LN theory 因此預測

$$E(k) = C_K \overline{\varepsilon}^{2/3} \cdot k^{-5/3} \cdot (kL)^{-\mu/9}$$

實驗量測 $\mu \approx 0.5$ 。

Novikov 與 Stewart 於 1964 年根據流場的類似性，也曾提出一模擬間歇性的統計模型 (statistical model)；Frisch et al (1978) 改從“碎階” (fractal) 觀念，推出他們的動力模型 (dynamical model)，結果與前者相同，稱之為 β -model。我們介紹統計模型如下。假想一尺度為 ξ_0 的漩渦，因不穩定“碎成” $C (>> 1)$ 個尺度為 ξ_1 的漩渦，則 $\xi_1 \sim \xi_0 C^{-1/3}$ ，並假設這 C 個漩渦中只有 $M (<< C)$ 個是活躍的 (劇烈區)，亦即能量只傳至這 M 個漩渦中。而這 M 個尺度為 ξ_1 的漩渦，每一個都將因不穩定再“碎成” C 個尺度為 ξ_2 的漩渦， $\xi_2 \sim \xi_1 C^{-1/3} \sim \xi_0 C^{-2/3}$ ，其中又只有 $M (<< C)$ 個是活躍的。以是類推，直至最小尺度。考慮在第 n 階時，尺度為 $\xi_n \sim \xi_0 C^{-n/3}$ ，漩渦總數為 C^n 個，其中只有 M^n 個是活躍的，利

用 box-counting 技巧， ε 的“碎階” (fractal dimension)， D ，定義為

$$D \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log(\text{活躍漩渦數})}{\log(\text{尺度})} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log(M^n)}{\log(\xi_0 C^{-n/3})} \right) = \frac{3 \log(M)}{\log(C)}。$$

同理當 $r \sim \xi_p \sim \xi_0 C^{-p/3}$ 位於慣性區時， $\overline{\varepsilon_r^n} \sim \varepsilon_r^n \left(\frac{M}{C} \right)^p$ ；考慮 $n=1$ 時， $\overline{\varepsilon_r} \sim \varepsilon_r \left(\frac{M}{C} \right)^p \sim \bar{\varepsilon}$ ，因此 $\overline{\varepsilon_r^n} \sim \bar{\varepsilon}^n \left(\frac{M}{C} \right)^{-p(n-1)}$ 。定義 $\mu = 3-D$ ，則 $\overline{\varepsilon_r^n} \sim \bar{\varepsilon}^n (\xi_0 / r)^{-\mu(1-n)}$ ，因此 $E(k) \sim \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} (k \xi_0)^{-\mu/3}$ 。

其他已提出的間歇性模型尚有許多，如採用 multi-fractal 觀念，Meneveau & Sreenivasan (1987) 的 p -model 與 Benzi et al (1984) 的 random- β model；推導機率分佈之 ODE 的 She(1991) 的 two-fluid model；組織流場漩渦物理結構的 phenomenological models，如 Tennekes (1968) 的 vortex tube model、Corrsin (1962) 的 vortex sheet model、Pullin et al (1994) 的 Townsend-Lundgren vortex model 等等。

5. 等向均質紊流場 (isotropic homogeneous turbulence)

等向均質紊流場是最簡單的紊流場，真實的流場中其實很難找到這樣的流場，然而等向均質的特性排除許多分析上的困難，使得理論分析較容易進行；其次，多數的研究皆傾向於結論小尺度紊流(“小漩渦”)是等向均質的，因此等向均質紊流理論應可適度描述小尺度紊流。所謂均質，指流場變數值，統計上不會因座標的位移 (translation) 而改變，也就是說流場的結構到處相同 (空間上)；等向則是流場變數值統計上不會因座標的旋轉 (rotation) 而改變，也就是流場的結構沒有特定的方向。一個均質流場，必定在一個無窮(相對大)空間，而其平均速度的空間梯度 (spatial gradients) 必定為零，也就是平均速度是一個常數，則選擇適當的相對座標，我們可以說 $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ ，因此 $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$ 。

首先，我們介紹兩點兩時速度關係 (two-time-two-point velocity correlation)，定義為 $R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) \equiv \overline{u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2)}$ ，其中 u_i 代表 i^{th} 方向的速度分量；假設 ergodic，則 $\overline{\cdot}$ 可以是時間或空間或 ensemble 平均值。對於“靜定”(stationary) 場， R_{ij} 只跟時間差距有關，因此 $R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) \equiv R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, |t_1 - t_2|)$ ；加上均質性，亦即 R_{ij} 只跟兩點的相對位置有關，則 $R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) = R_{ij}(\mathbf{r}, |t_1 - t_2|)$ ， $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ 。同理，兩點單時速度關係 (one-time-two-point) 定義為 $R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \equiv \overline{u_i(\mathbf{x}_1, t) u_j(\mathbf{x}_2, t)}$ ，“靜定”加上均質性，則 $R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = R_{ij}(\mathbf{r})$ 。考慮均質不可壓縮 Navier-Stokes 方程：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_m} (u_i u_m) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_m} + f_i \quad (5.1)$$

其中 f_i 為 i^{th} 方向的外加作用力 (external force)。將 $u_i(\mathbf{x})$ 的方程式乘上 $u_j(\mathbf{x}')$ 加上 $u_j(\mathbf{x}')$ 的方程式乘上 $u_i(\mathbf{x})$ ，其結果再加以平均，可得到

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial t} = T_{ij}(\mathbf{r}) + P_{ij}(\mathbf{r}) + 2\nu \frac{\partial^2 R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_m \partial r_m} + F_{ij}(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

其中 $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ，

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{\partial}{\partial r_m} \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_m(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) - u_i(\mathbf{x}, t) u_m(\mathbf{x}', t) u_j(\mathbf{x}, t)} \\ P_{ij}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \overline{u_j(\mathbf{x}', t) p(\mathbf{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}', t)} \right) \\ F_{ij}(\mathbf{r}, t) &\equiv \overline{u_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t) + u_j(\mathbf{x}', t) f_i(\mathbf{x}, t)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

作 Fourier-Stieltjes transform，得 (令 \mathbf{k} 為 wave vector，且 $k = |\mathbf{k}|$)

$$\frac{\partial \Phi_{ij}(\mathbf{k})}{\partial t} = \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) + \Pi_{ij}(\mathbf{k}) - 2\nu k^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k}) + \Psi_{ij}(\mathbf{k}) \quad (5.4)$$

其中

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{r}) &= \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \\ T_{ij}(\mathbf{r}) &= \int \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \\ P_{ij}(\mathbf{r}) &= \int \Pi_{ij}(\mathbf{k}) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \\ F_{ij}(\mathbf{r}) &= \int \Psi_{ij}(\mathbf{k}) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.5)$$

當 $i=j$ 且 $r=0$ 時， $R_{ii}(0) = \overline{u_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x})} = \int \Phi_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = q^2 \equiv 3u'^2$ 為紊流平均動能的兩倍，而 Φ_{ii} 為三維的能量頻譜分佈， Γ_{ii} 與 F_{ii} 分別代表慣性力與外力。此外，由於不可壓縮性，且 $\frac{\partial}{\partial r_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x'_i}$ ，令 $u'_i \equiv u_i(\mathbf{x}')$ ，則

$$P_{ii}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \overline{u'_i p} - \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{u_i p'} \right) = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_i} \overline{u'_i p} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i p'} \right\} = 0$$

因此對任一 \mathbf{k} ， $\Pi_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = 0$ ，表示壓力僅只是改變能量在方向上的分佈 (directional distribution)，但總能量是守恆的 (conserved)，因此

$$\frac{\partial \Phi_{ii}(\mathbf{k})}{\partial t} = \Gamma_{ii}(\mathbf{k}) - 2\nu k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}) + \Psi_{ii}(\mathbf{k}) \quad (5.6)$$

等向流場，能量分佈應與方向無關，因此 $\Phi_{ii}(\mathbf{k})$ 只與 \mathbf{k} 的大小， k ，有關，而能量頻譜分佈 $E(k) = \frac{1}{2} \{4\pi k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k})\}$ ， $\int_0^\infty E(k) dk = \frac{1}{2} q^2$ ，其統禦方程應為

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) + F(k) \quad (5.7)$$

其中 $T(k, t) = 2\pi k^2 \Gamma_{ii}(\mathbf{k})$ 表示因慣性力而淨流入尺度為 k 的運動的能量，數學上可以證明

$$\int_0^{\infty} T(k, t) dk = 0 \quad (5.8)$$

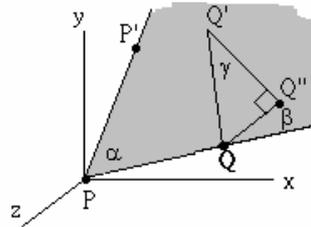
意即慣性力不斷將能量在各個尺度運動間交互傳遞著，但能量始終是守恆的。能量會因磨耗而損失，或因外加而增長，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{q^2} = -2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k, t) dk + \int_0^{\infty} F(k) dk \equiv -\varepsilon + \xi$$

對於“靜定”流場， $\frac{1}{2} \overline{q^2} = \text{常數}$ ，因此 $\varepsilon = \xi$ 。

我們再進一步針對等向均質紊流場探討(5.2)(5.3)式中的關係函數。首先考慮一階關係函數如 $\overline{u_i p'}$ ，若旋轉 i -座標 180 度，因等向特性其值應不變，但是 $u_i = -u_i$ ，因此 $\overline{u_i p'} = -\overline{u_i p'} = 0$ ，同理 $\overline{u_i' p} = 0$ ；因此對於等向均質紊流， $P_{ij} = 0$ 。其次二階關係函數，等向均質紊流場中 $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \frac{1}{3} \overline{q^2} \equiv u'^2$ ；此外，如果 $i \neq j$ ， $\overline{u_i u_j'} = 0$ ，因為 $u_i u_j'$ 出現值為正

或為負的機率相等。假設，如圖所示，空間一點 P 在某一方向 $\overrightarrow{PP'}$ 上的速度分量為 p ，另一點 Q 在 $\overrightarrow{QQ'}$ 上的速度分量為 q ，我們想了解 p 和 q 的關係如何，即 \overline{pq} 。



PQP' 形成一平面，讓 $\alpha \equiv \angle P'PQ$ ， $\beta \equiv \pi - \angle PQQ''$ ， $\gamma \equiv \angle QQ'Q''$ ， Q'' 為 Q' 點在平面 PQP' 上的投影；令 p_1, p_2, p_3 與 q_1, q_2, q_3 分別為 P 點與 Q 點在 PQ 方向、垂直於 PQ 與 $Q'Q''$ 之方向、 $Q'Q''$ 方向之速度分量，則

$$p = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha .$$

$$q = q_1 \cos \beta \sin \gamma + q_2 \sin \beta \sin \gamma + q_3 \cos \gamma$$

因此

$$\begin{aligned} \overline{pq} &= \overline{p_1 q_1} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \overline{p_1 q_2} \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \overline{p_1 q_3} \cos \alpha \cos \gamma \\ &+ \overline{p_2 q_1} \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \overline{p_2 q_2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \overline{p_2 q_3} \sin \alpha \cos \gamma \end{aligned}$$

等向特性使得 $\overline{p_i q_j} = 0$ ， $i \neq j$ ，若定義函數 $f(r)$ 與 $g(r)$ 如下：

$$\begin{aligned} f(r) &= \overline{p_1 q_1} / u'^2 \\ g(r) &= \overline{p_2 q_2} / u'^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

其中 1 代表 \mathbf{r} 方向的分量， $f(r)$ 稱為 longitudinal correlation coefficient，2 代表一垂直於 \mathbf{r} 方向

的分量， $g(r)$ 稱為 transverse correlation coefficient，則等向均質紊流場中任意兩點任意方向的速度分量關係函數可寫為：

$$\frac{\overline{pq}}{u'^2} = (f(r, t) \cos\alpha\cos\beta + g(r, t)\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma \quad (5.10)$$

在卡式座標中，可得

$$R_{ij}(r, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = u'^2 \left\{ \frac{f(r, t) - g(r, t)}{r^2} r_i r_j + g(r) \delta_{ij} \right\} \quad (5.11)$$

因此 9 個 R_{ij} 元素中只有兩個是獨立的(independent)。又假設流場為不可壓縮，則

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i} = 0 \Rightarrow f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f}{\partial r} = g(r) \quad (5.12)$$

同理，若定義 $S_{ij,m} = \overline{u_i u_j u'_m}$ ，等向均質的結果是 18 個 S 元素中有 13 個值為零，僅剩 $\overline{u_p^2 u'_p}$ 、 $\overline{u_p u_{n1} u'_{n1}}$ 、 $\overline{u_p u_{n2} u'_{n2}}$ 、 $\overline{u_{n1}^2 u'_p}$ 、 $\overline{u_{n2}^2 u'_p}$ 五個可能不為零，其中 p 是指 \mathbf{r} 方向，而 n_1 、 n_2 分別指垂直於 \mathbf{r} 的兩方向。定義 $u'^3 k(r) = S_{pp,p}$ ， $u'^3 h(r) = S_{nn,p}$ ， $u'^3 q(r) = S_{np,n}$ ，則等向均質的結果是

$$S_{ij,m} = u'^3 \left\{ (k - h - 2q) \frac{r_i r_j r_m}{r^3} + \delta_{ij} h \frac{r_m}{r} + q (\delta_{im} \frac{r_j}{r} + \delta_{jm} \frac{r_i}{r}) \right\} \quad (5.13)$$

加上不可壓縮條件：

$$\frac{\partial S_{ij,m}}{\partial r_m} = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{4r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k) \quad (5.14)$$

$$h = -\frac{1}{2} k$$

6. 基礎理論發展

有關等向均質紊流的理論相當繁雜，我們僅針對 Karman-Howarth similarity 與 Kraichnan 的 DIA 近似理論作代表性介紹，有興趣進一步了解者，可參閱 Hinze 的“Turbulence”與 Batchelor 的“Homogeneous turbulence”，或早期 Batchelor、Proudman、Saffman、Taylor，Townsend 等人的論文或其他近似理論如 Yakhot & Orszag (1986) 的 RNG (renormalization group theory)、Orszag (1970) 的 EDQNM (eddy-damped quasi-normal Markovian theory) 等等。

(i) Karman-Howarth similarity

將(5.11)(5.12)(5.13)(5.14)代入(5.2)，並注意到 $T_{ij}(r, t) = \frac{\partial}{\partial r_m} [S_{im,j} + S_{mj,i}]$ 且 $P_{ij} = 0$ ，同時

去掉外力部分(假設大尺度外加作用力對小尺度運動影響可忽略)，可得

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 f) = u'^3 \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{4k}{r} \right) + 2\nu u'^2 \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (6.1)$$

(6.1)式最早於 1938 年由 Karman & Howarth 所導出，即稱為 Karman-Howarth equation，適用於等向均質紊流場。

(6.1)式存在有 similarity solution，例如 Karman & Howarth 尋找一個解，形式如下：

$$\begin{aligned} f(r, t) &= \tilde{f}(r/L(t)) \equiv \tilde{f}(\xi) \\ k(r, t) &= \tilde{k}(r/L(t)) \equiv \tilde{k}(\xi) \end{aligned} \quad (6.2)$$

代入(6.1)發現

$$\frac{du'^2}{dt} \cdot \tilde{f} - \left(u'^2 \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \right) \cdot \xi \tilde{f}' = \frac{u'^3}{L} \cdot (\tilde{k}' + 4\xi^{-1} \tilde{k}) + \underline{\underline{(2\nu u'^2 L^{-2})}} \cdot \xi^{-4} (\xi^4 \tilde{f}')'$$

因此存在有 similarity 解的條件是：

$$\begin{aligned} \frac{L}{u'^3} \cdot \frac{du'^2}{dt} &= \text{constant} \\ \frac{L}{u'^3} \cdot \frac{u'^2}{L} \frac{dL}{dt} &= \frac{1}{u'} \frac{dL}{dt} = \text{constant} \\ \frac{L}{u'^3} \cdot \underline{\underline{2\nu u'^2 L^{-2}}} &= 2\nu (Lu')^{-1} = \text{constant} \end{aligned}$$

整理可得 $L(t) \propto t^{1/2}$ ， $u' \propto t^{-1/2}$ 。對於 $u'^2 \propto t^{-n}$ 的紊流場(動能成冪方衰減)，

$$\text{Taylor microscale} = \lambda \equiv \sqrt{\frac{5\nu q^2}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{10\nu u'^2}{du'^2/dt}} \propto t^{1/2} \quad (6.3)$$

也就是說 $L(t) \propto \lambda$ 或 $f(r, t) = \tilde{f}(r/\lambda)$ 且 $k(r, t) = \tilde{k}(r/\lambda)$ 。早期實驗數據似乎支持 $u'^2 \sim t^{-n}$ 的結果，但改善後的實驗技術顯示並不盡然，一般相信，Karman-Howarth 解只有在雷若數非常大(大到其數字大小已不重要)時才會出現。Huang & Leonard (1994)根據直接數值模擬結果的指引，找到另一個解，形式如下：

$$\begin{aligned} f(r, t) &= \tilde{f}_1(r/L) + \text{Re}_1^b \cdot \tilde{f}_2(r/L) \\ k(r, t) &= \text{Re}_1^{b-1} \cdot \tilde{k}(r/L) \end{aligned} \quad (6.3)$$

其中 \tilde{f}_1 為 regular confluent hypergeometric function，也就是

$$\tilde{f}_1(r/\lambda) = M\left(n, \frac{5}{2}, -\frac{5}{4n} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2\right), \quad \tilde{f}_1 \sim r^{-2n} \text{ as } r \rightarrow \infty$$

其中紊流動能 $u'^2 \sim t^{-n}$ 。函數 \tilde{f} 與 \tilde{k} 或 \tilde{f}_2 與 \tilde{k} 的相關微分方程則只能找到一個，因此無法得其解，這也正是解決紊流問題中最大的障礙：所得的微統禦方程式數目比未知的函數數目少(closure problem)。

(ii) Direct Interaction Approximation

針對不可壓縮等向均質紊流，Kraichnan 於 1959 年提出他的 DIA 近似理論。由於有一些 LES 模型是根據 DIA 發展出來的，且 DIA 本身對紊流物理與數學上的理解有相當的幫助，我們在此作簡單的介紹。有興趣了解詳細內容者，建議應直接閱讀 Kraichnan 在 1959 以及 60、70 年代陸續發表的論文。

(a) 頻譜分析

考慮 Navier-Stokes equations 在頻譜空間為：

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \tilde{u}_i = -\frac{1}{\rho} i k_i \tilde{p} - i k_m (\tilde{u}_i \tilde{u}_m) + \tilde{f}_i \quad (6.4)$$

其中任一變數 $g(\mathbf{x}, t) = \int g(\mathbf{k}, t) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ 。不可壓縮條件為 $i k_i \tilde{u}_i = 0$ ，代入上式並假設外力是 solenoidal (此為維持流場為不可壓縮的必要條件)，得 $0 = \frac{1}{\rho} k^2 \tilde{p} + k_i k_m (\tilde{u}_i \tilde{u}_m)$ ，也就是

$$\frac{1}{\rho} \tilde{p} = -\left(k_i k_m / k^2\right) (\tilde{u}_i \tilde{u}_m) \quad (6.5)$$

代入(6.4)，得

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \tilde{u}_i = -i k_m P_{ij}(\mathbf{k}) (\tilde{u}_j \tilde{u}_m) + \tilde{f}_i \quad (6.6)$$

$$P_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \delta_{ij} - i k_i k_j / k^2$$

同樣的方程可以獲得，若假設流場為周期 L 之周期函數(必要時可令 $L \rightarrow \infty$)，因之，

$$g(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{k_i = -\infty \\ i=1,2,3}}^{\infty} \tilde{g}(\mathbf{k}, t) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (6.7)$$

且

$$(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2)(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}}} \tilde{g}_1(\mathbf{p}) \tilde{g}_2(\mathbf{q})$$

將(6.6)改寫為

$$L \tilde{u}_i \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \tilde{u}_i(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2} \Pi_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \tilde{u}_j(\mathbf{p}) \tilde{u}_m(\mathbf{q}) + \tilde{f}_i(\mathbf{k}) \quad (6.8)$$

$$\Pi_{ijm}(\mathbf{k}) \equiv k_m P_{ij}(\mathbf{k}) + k_j P_{im}(\mathbf{k})$$

為簡化起見，以符號 $u_i(\mathbf{k}) \equiv \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t)$ ， $u'_i(\mathbf{k}) \equiv \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t')$ 表示時間的影響，則

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \overline{u_i(\mathbf{k})u'_n(-\mathbf{k})} &= -\frac{i}{2} \Pi_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \overline{u_j(\mathbf{p})u_m(\mathbf{q})u'_n(-\mathbf{k})} + \overline{f_i(\mathbf{k})u'_n(-\mathbf{k})} \\ &= -\frac{i}{2} \Pi_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} S_{njm}(-\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \overline{f_i(\mathbf{k})u'_n(-\mathbf{k})} \quad (6.9) \end{aligned}$$

$$S_{njm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \overline{u_n(\mathbf{k})u'_j(\mathbf{p})u'_m(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0 \quad (6.10)$$

(b) DIA 理論

DIA 理論的主要企圖是想找到二階關係函數 $\overline{u_i(\mathbf{p})u'_n(\mathbf{q})}$ 與三階關係函數 $S_{njm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 的近似關係，使得問題可解(closed)。理論中幾個基本假設是：

1) 給定三個波向量 $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ ，於計算 $S_{njm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 時，將(6.8)式慣性項中的 $u_j(-\mathbf{p})u_m(-\mathbf{q})$ 項當成是一個對 $u(\mathbf{k})$ 運動的干擾(disturbance)，剩餘的慣性項與時間微分項併為一非線性的運算子(operator)；假設 $\zeta_{ij}(\mathbf{k}, t, t')$ 是該運算子的 Green function，則干擾對 $u(\mathbf{k})$ 運動的影響應為

$$\delta u_i(\mathbf{k}) = \int_{t_0}^t \zeta_{ij}(\mathbf{k}, t, t') b_j(\mathbf{k}, t') dt' \quad (6.11)$$

$$b_i(\mathbf{k}, t) \equiv -i \Pi_{ijm}(\mathbf{k}) u_j(-\mathbf{p}) u_m(-\mathbf{q})$$

2) $u(\mathbf{k})$ 之間的關連完全源於慣性作用，與初始條件或外力無關。

3) 統計上，在空間趨於無窮大時，有限個 $u(\mathbf{k})$ 間的相互影響趨於零(Weak Dependence Principle, WDP)。

根據這三個假設，則

$$S_{njm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \overline{\delta u_n(\mathbf{k})u'_j(\mathbf{p})u'_m(\mathbf{q})} + \overline{u_n(\mathbf{k})\delta u'_j(\mathbf{p})u'_m(\mathbf{q})} + \overline{u_n(\mathbf{k})u'_j(\mathbf{p})\delta u'_m(\mathbf{q})}$$

也就是假設 $u(\mathbf{k}), u(\mathbf{p}), u(\mathbf{q})$ 三者間的關連僅繫於 $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ 間的交互影響，其他 Fourier components 對三者的影響視為可忽略的高階影響，此即 DIA 理論的精髓所在。對於“靜定”等向均質紊流，可定義：

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \overline{u_i(\mathbf{k}, t + \tau) u_j^*(\mathbf{k}, t)} &= \frac{1}{2} P_{ij}(\mathbf{k}) U(k, \tau) = P_{ij}(\mathbf{k}) (4\pi k^2)^{-1} E(k) r(k, \tau) \\ \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \overline{f_i(\mathbf{k}, t + \tau) f_j^*(\mathbf{k}, t)} &= \frac{1}{2} P_{ij}(\mathbf{k}) \tilde{F}(k, \tau) = \frac{1}{2} P_{ij}(\mathbf{k}) (4\pi k^2)^{-1} F(k) \chi(k, \tau) \quad (6.12) \\ \overline{\zeta_{ij}(\mathbf{k}, t + \tau, t)} &= P_{ij}(\mathbf{k}) g(k, \tau) \end{aligned}$$

根據 DIA，Kraichnan 得到下列式子：

$$2vk^2E(k, \tau) = T(k, \tau) + \varepsilon_i(k, \tau)$$

$$T(k, \tau) = \iiint_{\Delta} T(k | p, q) dpdq \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_i(k, \tau) = F(k) \int_0^{\infty} g(k, s) \chi(k, s) ds$$

其中 Δ 表示 $k = |\mathbf{k}|$, $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$ 三者必需能組成三角形的三邊長，而

$$T(k | p, q) = \frac{xy + z^3}{q} \theta(k, p, q) \left\{ k^2 E(p) E(q) - p^2 E(q) E(k) \right\} \quad (6.14)$$

$$\theta(k, p, q) = \int_0^{\infty} g(k, s) r(p, s) r(q, s) ds \quad (6.15)$$

其中 $T(k | p, q)$ 表能量藉由 k, p, q 三者間的交互作用而傳至 k 運動的淨量， $\varepsilon_i(k, \tau)$ 則是外加的能量； $\theta(k, p, q)$ 表示三個尺度運動間交互作用的特徵時間， x, y, z 分別表示由 \mathbf{k} 、 \mathbf{p} 、 \mathbf{q} 所形成三角形的三個內角的 cosine 值； $g(k, \tau)$ 與 $r(k, \tau)$ 則必須滿足下列方程：

$$\frac{dg(k, \tau)}{d\tau} + vk^2 g(k, \tau) = -\frac{k}{2} \iiint_{\Delta} dpdq \cdot \frac{p}{q} \cdot b(k, p, q) \cdot E(q) \cdot \left(\int_0^{\tau} g(k, \tau - s) g(p, s) r(q, s) ds \right) \quad (6.16)$$

$$\frac{dr(k, \tau)}{d\tau} + vk^2 r(k, \tau) = \frac{k}{2} \iiint_{\Delta} dpdq \left\{ \begin{aligned} & \frac{k^2}{pq} \cdot a(k, p, q) \cdot \frac{E(p) - E(q)}{E(k)} \cdot \left(\int_{\tau}^{\infty} g(k, s - \tau) r(p, s) r(q, s) ds \right) \\ & - \frac{k^2 p}{q} \cdot b(k, p, q) \cdot E(q) \cdot \left(\int_0^{\infty} g(p, s) r(k, s - \tau) r(q, s) ds \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

其中

$$a(k, p, q) = \frac{1}{2} (1 - xyz - 2y^2 z^2) \quad (6.18)$$

$$b(k, p, q) = p/k \cdot (xy + z^3)$$

仔細地檢查可發現除了(5.8)外， $T(k | p, q) + T(p | k, q) + T(q | k, q) = 0$ ，亦即任意三個 Fourier modes 間能量守恆地交互傳遞著。若考慮能量從波數小於 k_m 的運動傳至波數大於 k_m 的運動的總流量

$$\Pi(k_m) = \int_{k_m}^{\infty} T(k, \tau) dk = - \int_0^{k_m} T(k, \tau) dk \equiv - \int_0^{k_m} T(k | k_m) dk \quad (6.19)$$

$$T(k | k_m) \equiv \iint_{\Delta'} T(k | p, q) dp dq, \quad (6.20)$$

Δ' 表示 k, p, q 除了可組成三角形三邊長且 $k \leq k_m, p \text{ or } q > k_m$ 。一個等效“渦漩”黏滯係數可定義為：

$$v_t(k | k_m) \equiv -T(k | k_m) / 2k^2 E(k) \quad (6.21)$$

將(6.13)中的 $T(k, \tau)$ 拆為二部分：一是 $k, p, q \leq k_m$ 間的交互作用，一是 $k \leq k_m, p \text{ or } q > k_m$ 間的交互作用，則(考慮不靜定流場)

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = T''(k, t) - 2(v + v_t(k | k_m))k^2 E(k, t) + \varepsilon_i(k, t), \quad k < k_m \quad (6.22)$$

$$T''(k, t) = \iint_{\Delta, k, p, q \leq k_m} T(k | p, q) dp dq$$

其中 $\int_{k \leq k_m} T''(k, \tau) dk = 0$ 。

我們得如下結論：考慮波數小於 k_m 的“漩渦”運動，部分能量因磨擦轉換為熱能(磨耗率 $= 2vk^2 E(k)$)，部分能量則因慣性作用傳遞至波數大於 k_m 的“漩渦”運動(傳遞率 $= 2v_t(k | k_m)k^2 E(k)$)。如果這些波數小於 k_m 的“漩渦”自外界得到的能量少於磨耗率與傳遞率之和，則這些“漩渦”會逐漸衰退(decay)；反之，這些“漩渦”會成長(grow)或維持“靜定”(stationary)。

7. DNS 與 LES

在第二節中我們已經瞭解了紊流中的尺度範圍為 $L/\eta \sim \text{Re}_\lambda^{3/2} \sim \text{Re}_L^{3/4}$ ；數值方法中所謂的直接數值模擬 (Direct Numerical Simulations, DNS)，乃是指以數值方法模擬所有尺度的運動方程。以頻譜分析為例，紊流動能分配在波數 $k_L \sim 1/L$ 與 $k_\eta \sim 1/\eta$ 之間，對於尺度比 η 還小的“漩渦”，其能量微忽其微，可視為不存在，因此 DNS 將模擬所有 $\mathbf{u}(\mathbf{k})$, $k_L \leq k = |\mathbf{k}| \leq k_\eta$ ，的運動。物理上波數是連續的(continuous)，因此紊流的自由度(degree of freedom)理論上是無窮多個；數值上我們則必須把自由度離散化(discretization)。例如(6.7)式中波數是離散的，同時不採無窮級數而改以有限級數取代之，也就是只取 $k_{\min} \leq |\mathbf{k}| \leq k_{\max}$ 。通常最大可用的波數(maximum available wavenumber, k_{\max})會取數倍於 k_η ，若此波數不夠大，當能量自“大漩渦”傳至“小漩渦”時，來不及磨耗又無法繼續往下傳遞，因此將逐漸堆積在高頻區域，最後發散掉；反之， $k_{\min} \leq k_L$ 較不是問題，但由於波數已離散化且同一波數之波向量(wave vectors)的數目正比於 k^2 ，因此“大漩渦”的解析度反而比較差，必須留意。無論如何，有限自由度的數值紊流(numerical turbulence)可由此獲得。

DNS 理論上應可以解開 Navier-Stokes turbulence 之謎，然而實際上並不那麼可行，主要原因是計算量過大，不是目前的電腦的速度與容量所能處理。數值紊流自由度雖說有限，但其大小仍是十分驚人，以 $\text{Re}_\lambda = 100$ 的流場為例，假設 $L=2\pi$ ，則 $k_\eta \approx 1/\eta \approx \text{Re}_\lambda^{3/2}/L \approx 159$ ，若採等向數值解析度(isotropic resolution)，則 $k_{\max} = \max \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \sqrt{3} \max |k_1| \approx k_\eta$ ，因此 $\max |k_1| \approx 92$ ，這樣的流場我們需要 $\frac{4\pi}{3}(\max |k_1|)^3 \approx 3 \times 10^6$ 個自由度(\mathbf{k})來表呈現，或則說我們需要同時解約 300 萬個 $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ 的聯立方程式。更甚者，數值紊流自由度的大小隨雷若數增大而呈非線性增大 ($\propto \text{Re}_\lambda^{9/2}$)，當 $\text{Re}_\lambda = 200$ 時，所需自由度已達 7000 萬以上，而我們還尚未探討時間尺度問題。除了空間尺度外，紊流的時間尺度範圍也是很大，最小的時間尺度多以 Kolmogorov (dissipation) time scale 為代表， $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ ，最大尺度可以 L/q 為特徵時間，則欲模擬完整的紊流場，模擬時間長度至少應是好幾個 L/q ，而欲觀察所有波動變化，時間增量(time increment dt)不能大於 τ_η ，因此完成一個 DNS 必須執行的時間積分次數為

$$\# \text{ of time integrations} \sim \frac{L/q}{(\nu/\varepsilon)^{1/2}} \sim \frac{L}{\lambda} \sim \text{Re}_\lambda。$$

也就是說雷若數加大，DNS 所需的儲存空間與執行時間至少呈 $\propto \text{Re}_\lambda^{9/2}$ 與 $\propto \text{Re}_\lambda^{11/2}$ 成長。而實際紊流發生時，其雷若數多在千或萬以上。由此考慮，再加上“大漩渦”解析度較差，DNS

僅適用於簡單幾何形狀、雷若數低的流場，多半應用於基礎研究中，如“小漩渦”物理特性的了解。

LES (Large Eddy Simulations)是放棄模擬“小漩渦”(small eddies)，只模擬“大漩渦”以降低所需的數值自由度。因為在一般工程應用中，“大漩渦”主導的流場巨觀特性占決策性的地位，蒐集“大漩渦”的特性或變化通常已足夠解決問題之用。然而，“小漩渦”的重要性雖然不是那麼直接，藉由慣性力的交互作用，它卻影響著“大漩渦”的運動。如何篩選欲模擬的漩渦群？未模擬的漩渦對欲模擬的漩渦又有何影響？這是 LES 的兩大課題。對於後者，通常未模擬的漩渦尺度夠小而可視為等向均質時，之前探討的等向均質紊流理論就可以拿來應用。我們仍以頻譜分析為例，最簡單的篩選方式是選定一個 cut-off 波數 k_c ，波數大於它的“漩渦”全部放棄，而通常 k_c 會取在 Kolmogorov 的慣性區內。

波數大於 k_c 的漩渦扮演的主要角色是將能量適時適量地自波數小於 k_c 的漩渦中接收過來 (energy cascade)，既然我們並未模擬波數大於 k_c 的漩渦，我們無法知道能量如何適時適量地傳送過去，這一部分的資訊就必須靠適當的、合理的假設來獲得。例如 Kolmogorov 的 DIA 近似理論，我們已知道能量從波數小於 k_c 的運動傳至波數大於 k_c 的運動的總流量是

$$\Pi(k_c) = - \int_0^{k_c} T(k | k_c) dk = \int_0^{k_c} 2\nu_t(k | k_c) k^2 E(k) dk,$$

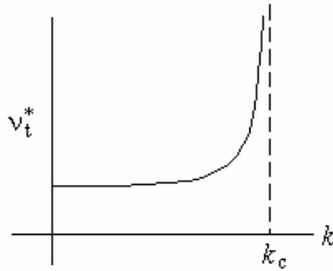
方程式(6.8)可修正為， $k_{\min} \leq |\mathbf{k}| \leq k_c$ ：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \nu_t(k | k_c)) k^2 \right) \tilde{u}_i(\mathbf{k}) = - \frac{i}{2} \Pi_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\substack{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k} \\ |\mathbf{p}|, |\mathbf{q}|, |\mathbf{k}| \leq k_c}} \tilde{u}_j(\mathbf{p}) \tilde{u}_m(\mathbf{q}) + \tilde{f}_i(\mathbf{k}) \quad (7.1)$$

其中 $\nu_t(k | k_c)$ 代表所有波數大於 k_c 的漩渦對波向量 \mathbf{k} 的運動之影響，稱為 spectral eddy viscosity；Kraichnan(1976) 的 Test Field Model (TFM) 與 Orszag (1970) 的 Eddy-Damped-Quasi-Normal Markovian (EDQNM) 提供如下之 $\nu_t(k | k_c)$ ：

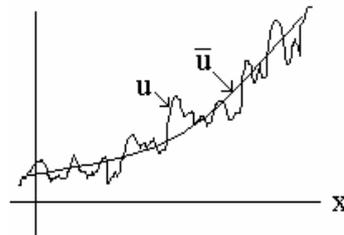
$$\nu_t(k | k_c) = \nu_t^* \left(\frac{k}{k_c} \right) \cdot \left(\frac{E(k_c)}{k_c} \right)^{1/2} \quad (7.2)$$

適當的假設仍需要以獲得 $\nu_t^*(k/k_c)$ ，大致為



詳細內容見原論文。

頻譜分析在實際應用上並不常見，多數情況下我們必須在物理空間內(physical space)進行篩選的工作。假設選定某一函數 $G(\mathbf{x}, \sigma)$ 為過濾器(filter)， σ 是其一特徵長度，小於此一尺度內的流場變化將被忽略掉，或者說我們考慮的是流場變數在此一尺度內的平均值，如下圖所示：

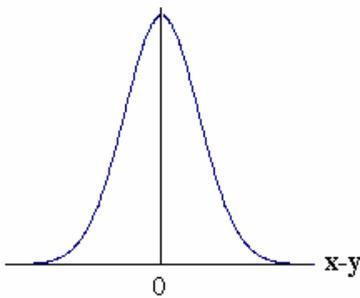


定義 $\bar{f}(\mathbf{x}, t) \equiv \int f(\mathbf{y}, t)G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \sigma)d\mathbf{y} = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)G(\mathbf{y}, \sigma)d\mathbf{y}$ ，積分範圍為整個流場，且 $f' \equiv f - \bar{f}$ 。幾個常見的過濾器有：

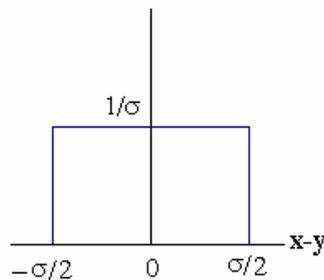
$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 / 2\sigma^2) \quad (7.3)$$

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \begin{cases} 1/\sigma & \text{if } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sigma/2; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7.4)$$

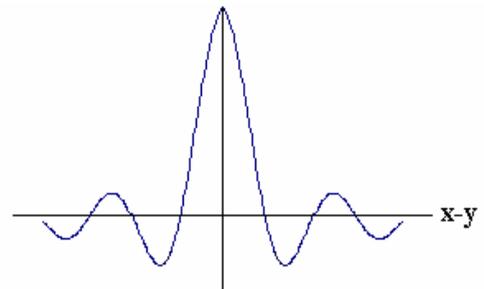
$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \frac{2\sin(\pi(\mathbf{x} - \mathbf{y})/\sigma)}{\pi(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (7.5)$$



(7.3)



(7.4)



(7.5)

若將不可壓縮 Navier-Stokes 方程過濾之，得下式：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i u_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i + \bar{f}_i \quad (7.6)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$$

其中 \bar{f}_i 是外力。定義

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -\left(\eta_{ij} - \frac{1}{3} \eta_{kk} \delta_{ij} \right) \\ \eta_{ij} &= \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j} \\ L_{ij} &= \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \end{aligned} \quad (7.7)$$

則 $\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \eta_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + L_{ij} + \eta_{ij}$ ，因此(7.6)變成

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{3} \eta_{kk} \right) + \nu \nabla^2 \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - L_{ij}) + \bar{f}_i \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7.9)$$

其中 L_{ij} 稱為 Leonard stresses，可計算而得； τ_{ij} 則是未模擬的漩渦對模擬中的漩渦之影響，稱為 subgrid scale stresses，必須靠假設模型獲得； η_{kk} 則併入壓力項內。方程式(7.8)與(7.9)再加上 τ_{ij} 的模型(subgrid model)，可解得 $\bar{u}_i(\mathbf{x}, t)$ 。

用得最廣的 τ_{ij} 模型莫過於 Smagorinsky's model，該模型假設

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -2\nu_t \bar{S}_{ij} \\ \nu_t &= (K_S \sigma)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \\ \bar{S}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

其中 turbulent eddy viscosity ν_t 已假設為等向，此模型因此在靠近邊界的地方並不適合； K_S 是 Smagorinsky's constant，通常配合實驗驗證獲得。其餘模型還有很多，可參閱 Lesieur & Metais(1996)、Mason (1994)、Piomelli (1993)、Boris et al (1992)等的回顧文獻。

相對於 DNS，LES 確實節省不少計算時間，因此可將數值紊流的雷若數推高，只可惜與實際工程應用的雷若數相去仍遠，但伴隨著模型準確性的改善與電腦科技的進步，潛力仍在。總而言之，DNS 與 LES 模擬全部或部分尺度之紊流運動，完全不作或只作部分尺度運動的模型，保留較完整的紊流本性，可供基礎研究之用；此外，不同於下節將介紹的傳統紊流模型，流場變數之時間變化完全在模擬之中，對於噪音、振動等問題，是相當具有潛力的分析工具。

8. Reynolds' equations 與 closure problem

為了解決工程紊流問題，傳統的辦法是放棄模擬流場所有空間上的、時間上的波動 (fluctuations)，只求平均流場。考慮引言中介紹的時間平均值或在 ergodic hypothesis 下的 ensemble average：

$$\bar{f} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \quad (8.1)$$

f_i 是變數 f 第 i 次的實驗值，因此時間上的高頻波動將被過濾掉(註：在 LES 中我們過濾掉的僅只是空間上的高頻波動)，又 $\overline{f'} = 0$ 。將不可壓縮 Navier-Stokes 方程平均之，得類似(7.6)之方程，一般整理為

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial x_j} \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (8.3)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.4)$$

$$\tau_{ij}^t = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (8.5)$$

方程式(8.2)與(8.3)，欲解得 $(\bar{\mathbf{u}}, p, \tau_{ij}^t)$ 是不夠的(indeterminate)，我們必須另外找出 τ_{ij}^t 的統禦方程，從 Navier-Stokes，其應為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \underbrace{-\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} - p' (\delta_{jk} u'_i + \delta_{ik} u'_j)}_{\text{turbulence diffusion}} + \underbrace{\mu \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}}_{\text{molecular diffusion}} \right\} \\ - \underbrace{\left(\overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{\text{production}} - \underbrace{2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}_{\text{dissipation}} + \underbrace{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{pressure-strain}} \end{aligned} \quad (8.6)$$

很明顯地， $(\bar{\mathbf{u}}, p)$ 的方程式牽扯到二階關係函數 $\overline{\rho u'_i u'_j}$ ，而 $\overline{\rho u'_i u'_j}$ 的統禦方程則牽扯上三階的關係函數 $\overline{\rho u'_i u'_j u'_k}$ 與速度-壓力關係函數，以此類推，所得的方程式數目永遠比未知數來得多，問題依然無可解，此即所謂的 closure problem。傳統的紊流模型即是在想辦法建立高階與低階關係函數額外的一些關係(relation)，以使問題完整可解(closed)，最簡單的例子莫過於 eddy viscosity models，亦即假設 $-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ ，有 Boussinesq、Prandtl、Karman eddy viscosity models 等；高階的模型可推至三階關係函數以解得(8.6)，如 $k-\epsilon$ models 等。

無論是高階或低階，紊流模型通常都極為 dissipative，如此才能維持一平滑(smooth)的平均流場，所得的平均流場因此也沒有空間上的波動成分。這是一個完全沒有波動的數值紊流，正

因此流場雷若數才可以很高，可以與真實的紊流場的雷若數相比擬。與DNS或LES相比，傳統的方法使用模型較多，模型使用範圍又廣(LES模型只用於空間高頻對低頻的影響，而傳統的方法中必須模型所有波動，時間的或空間的，低頻或高頻的，對平均流場的影響)，準確性常招質疑，同時不同流場有不同特性，適合的模型跟著不同，使用上並不方便。

9. 結論

我們的目標是解開紊流之謎並應用於工程上，電腦扮演的角色有：執行DNS輔助基礎研究與開發、改良紊流模型，執行LES與傳統模型模擬以利工程應用。基本物理現象如間歇性、類似性、等向性、均質性、能量慣性傳遞等等應充分理解，作為紊流模型之基礎。LES只模型具一致性之小漩渦並提供時間變化率，準確性較高，應用範圍也較廣，若能設法降低其計算量，潛力頗大。工程應用受限於雷若數要求仍靠傳統模型模擬，使用雖廣但迫切需求更好、更準確的紊流模型。

10. 參考文獻

general:

Arnold V.I., "Mathematical methods of classical mechanics", Springer-Verlag (1989).

Batchelor G.K., "The theory of homogeneous turbulence", Cambridge (1953).

Hinze J.O., "Turbulence", New York : McGraw-Hill(1975).

Lesieur M., "Turbulence in fluids : stochastic and numerical modelling", Dordrecht : M. Nijhoff (1987).

Moin A.S. and Yaglom A.M., "Statistical fluid mechanics", MIT Press: Cambridge (1975).

Reynolds O., "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels", Phil. Trans. R. Soc. **174**, 935 (1883).

isotropic homogeneous theory :

Barenblatt G.J. and Gavrilov A.A., "On the theory of self-similar degeneracy of homogeneous isotropic turbulence", Sov. Phys. JETP **38**, 399 (1974).

Batchelor G.K. and Proudman I., "The large-scale structure of homogeneous turbulence", Phil. Trans A. **248**, 369 (1956).

Batchelor G.K. and Townsend A.A., "Decay of vorticity in isotropic turbulence", Proc. R. Soc. London Ser. A **190**, 534 (1948).

- Batchelor G.K. and Townsend A.A., “Decay of isotropic turbulence in the initial period”, Proc. R. Soc. London Ser. A **193**, 539 (1948).
- Batchelor G.K. and Townsend A.A., “Decay of isotropic turbulence in the final period”, Proc. R. Soc. London Ser. A **194**, 527 (1948).
- Batchelor G.K., “Energy decay and self-preserving correlation functions in isotropic turbulence”, Q. of Appl. Math. **6**, 97 (1948).
- George W.K., “The decay of homogeneous isotropic turbulence”, Phys. Fluids A **4**, 1492 (1992).
- Huang M.J. and Leonard A., “Power-law decay of homogeneous turbulence at low Reynolds numbers”, Phys. Fluids **6**, 3765 (1994).
- Karman Th. von and Howarth L., “On the statistical theory of isotropic turbulence”, Proc. R. Soc. London Ser. A **164**, 192 (1938).
- Kolmogorov A.N., “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers”, C.R. Acad. Sci. URSS **30**, 301 (1941).
- Kolmogorov A.N., “On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid”, C.R. Acad. Sci. URSS **31**, 538 (1941).
- Kolmogorov A.N., “Dissipation of energy in locally isotropic turbulence”, C.R. Acad. Sci. URSS **32**, 16 (1941).
- Kraichnan R.H., “The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers”, J. Fluid Mech. **5**, 497 (1959).
- Kraichnan R.H., “Isotropic turbulence and inertial-range structure”, Phys. Fluids **9**, 1728 (1966).
- Kraichnan R.H., “An almost-Markovian Galilean-invariant”, J. Fluid Mech. **47**, 513 (1971).
- Kraichnan R.H., “Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence”, J. Fluid Mech. **47**, 525 (1971).
- Kraichnan R.H., “Eddy viscosity in two and three dimensions”, J. Atmos. Sci. **33**, 1521 (1976).
- Orszag S.A., “Analytical theories of turbulence”, J. Fluid Mech. **41**, 363 (1970).
- Saffman P.G., “The large-scale structure of homogeneous turbulence”, J. Fluid Mech. **27**, 581 (1967).
- Yakhot V. and Orszag S.A., “Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory”, J. Sci. Computing **1**, 3 (1986).
- intermittency model:**
- Benzi R., Paradisi G., Parisi G., and Vulpiani, “On the multifractal nature of fully-developed turbulence and chaotic systems”, J. Phys. A **17**, 3521 (1984).
- Corrsin S., “Turbulent dissipation fluctuations”, Phys. Fluids **5**, 1301 (1962).
- Frisch U., Sulem P.L., and Nelkin M., “A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence”, J. Fluid Mech. **87**, 719 (1978).

Gurvich A.S. and Yaglom A.M., “Breakdown of eddies and probability distributions for small-scale turbulence”, Phys. Fluids Supp., S59 (1967).

Kolmogorov A.N., “A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number”, J. Fluid Mech. **13**, 82(1962).

Lundgren T.S., “Strained spiral vortex model for turbulent fine structures”, Phys. Fluids **25**, 2193 (1982).

Meneveau C. and Sreenivasan K.R., “Simple multifractal cascade model for fully-developed turbulence”, Phys. Rev. Lett. **59**, 1424 (1987).

Oboukhov A.M., “Some specific features of atmospheric turbulence”, J. Fluid Mech. **13**, 77 (1962).

Pullin D.I., Buntine J.D., and Saffman P.G., “On the spectrum of a stretched spiral vortex”, Phys. Fluids **6**, 3010 (1994).

She Z, “Physical model of intermittency in turbulence: Near-dissipation-range non-Gaussian statistics”, Phys. Rev. Lett. **66**, 600 (1991).

She Z, “Physical model of intermittency in turbulence: Inertial-range non-Gaussian statistics”, Phys. Rev. Lett. **66**, 1701 (1991).

Tennekes H., “Simple model for the small-scale structure of turbulence”, Phys. Fluids **11**, 669 (1968).

DNS & LES & modelling :

Boris J.P., Grinstein F.F., Oran E.S. and Kolbe R.L., “New insights into large eddy simulation”, Fluid Dynamics Research **10**, 199 (1992).

Leonard A., “Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows”, Adv. Geophys. **18A**, 237 (1974).

Lesieur M. and Metais O., “New trends in large-eddy simulations of turbulence”, Annu. Rev. Fluid Mech. **28**, 45 (1996).

Mansour N.N. and Wray A.A., “Decay of isotropic turbulence at low Reynolds number”, Phys. Fluids. **6**, 808 (1994).

Mason P.J., “Large-eddy simulation: A critical review of the technique”, Q.J.R. Meteorol Soc. **120**, 1 (1994).

Piomelli Ugo, “Applications of large eddy simulations in engineering: An overview”, from “Large eddy simulation of complex engineering and geophysical flows” edited by B. Galperin and S.A. Orszag, Cambridge:University Press (1993).

Rogallo R.S., “Numerical experiments of homogeneous turbulence”, NASA Tech. Memo. No.81315 (1981).

陳景仁, “Prediction of turbulent flows”, Mechanical Engr. Dept., U. of Iowa.